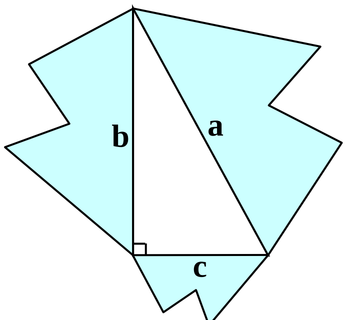
GENERALISING PYTHAGORAS – OPMERKINGS

VRAAG 1



Figuur 1

Vermoede ("conjecture"):
As gelykvormige veelhoeke op die sye van 'n reghoekige driehoek getrek word, is die area van die veelhoek op die skuinssy gelyk aan die som van die areas van die veelhoeke op die ander twee sye.

*Let op: ons het die vermoede deur **induksie** afgelei deur*
- *patroonherkenning (abstrahering) uit die spesiale gevalle in die tabel, en*
- *veralgemening na ongetoetste gevalle buite die tabel.*

*Om seker te wees ons veralgemening is geldig **moet** ons die vermoede **deduktief**, d.w.s. in die algemeen, vir alle gevalle, bewys!*

Let op: Die stelling van Pythagoras, d.i. "Die vierkant op die skuinssy …" word dikwels in terme van oppervlaktes uitgedruk: "Die oppervlakte van die vierkant op die skuinssy …". Dan is Pythagoras 'n *spesiale geval* van ons algemene vermoede, mits ons dan die vierkante op die sye interpreteer as *gelykvormige vierhoeke!*

Die bewys van die vermoede[1] is vir my een van die interessantstes en mooistes in Wiskunde en is 'n interessante tussenspel tussen veralgemening en spesialisering. Maak seker dat jy die argument volg!

Lemma

Gegee twee gelykvormige veelhoeke V_1 en V_2. As a 'n sylengte van V_1 en b 'n sylengte van V_2 is, dan is

$$\frac{\text{area } V_1}{\text{area } V_2} = \frac{a^2}{b^2}$$

Bewys: Kyk agter ...

Afleiding[2]:

$$\frac{\text{area } V_1}{\text{area } V_2} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \text{area } V_1 = \text{k}a^2 \text{ en area } V_2 = \text{k}b^2;\ \text{k} > 0$$

Ons vermoede kan nou soos volg in simbole geskryf word:

$$\text{k}a^2 = \text{k}b^2 + \text{k}c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (1)$$

waar die waarde van k bepaal word deur die spesifieke figure op die sye van die driehoek.[3]

---

[1] Pólya, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning, Volume 1: Induction and Analogy in Mathematics. Princeton: Princeton University Press.

[2] If we have $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, we cannot say $x = 2$ and $y = 3$! We *know* $\frac{4}{6}, \frac{20}{30}$, etc. can be simplified to $\frac{2}{3}$. We can say $x = 2\text{k}$ and $y = 3\text{k}$. This is very useful. For example, in the well-known problem "Divide 60 in the ratio 2:3", instead of using a remembered but poorly understood method like $\frac{2}{5}$ of 60, we can say: The numbers are 2k and 3k. Why? And 2k + 3k = 60. Why? So 5k = 60, so k = 12 so the parts are 2k = 2×12 = 24 and 3k = 3×12 = 36.

[3] Make sure that you understand what this means, by checking for some specific cases. For example, show that if you draw equilateral triangles on the sides a, b and c, then $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

BEWYS 1:

As ons (1) vir enige *spesifieke* waarde van k kan verifieër, volg (1) deur vermenigvuldiging vir *elke* ander k.

Wel, ons weet (1) is waar vir k = 1, die Stelling van Pythagoras!

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

$$\times \text{ k: } \Rightarrow \text{k}a^2 = \text{k}b^2 + \text{k}c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

D.w.s. (2) $\Rightarrow$ (1). Daarmee is die vermoede nou as ’n veralgemening van die Stelling van Pythagoras bewys!

BEWYS 2:

As ons egter (1) onafhanklik van (2) kan bewys, sal dit ’n mooi *alternatiewe bewys* van die Stelling van Pythagoras lewer. As ons dus (1) kan verifieër vir enige *spesifieke* waarde van k, behalwe 1 soos ooreengekom, volg (1) deur vermenigvuldiging vir *elke* ander waarde van k.

Só ’n spesifieke k waarvoor (1) geld, is maklik te kry en word in Figuur 2 en Figuur 3 getoon.

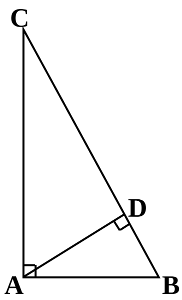
Ons kan maklik bewys dat in Figuur 2:

$$\Delta ABC \;|||\; \Delta DBA \;|||\; \Delta ADC$$

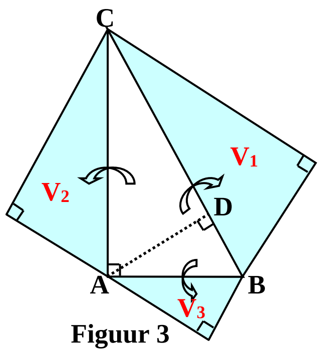
en ons weet

$$\text{area } \Delta ABC = \text{area } \Delta DBA + \text{area } \Delta ADC$$

(die geheel bestaan uit die som van sy dele).



Figuur 2



Figuur 3

Refleksie van hierdie driehoeke in die sye van ΔABC lewer Figuur 3. Dus is Figuur 3 ’n spesiale geval waarvoor ons *weet* dat ons vermoede *waar* is:

$$\text{area } V_1 = \text{area } V_2 + \text{area } V_3$$

$$\Rightarrow \text{k}a^2 = \text{k}b^2 + \text{k}c^2 \quad \text{vir ’n spesifieke k}$$

waaruit dit deur vermenigvuldiging ook vir elke ander waarde van k volg en is (1) dus bewys. QED

Alternatiewe bewys van die stelling van Pythagoras:

Dus het ons bewys

$$\text{k}a^2 = \text{k}b^2 + \text{k}c^2 \quad \text{vir alle k} > 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

Stel nou k = 1, of deel deur k:

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

D.w.s. (1) $\Rightarrow$ (2). Dus het ons die stelling van Pythagoras (2) bewys as ’n *spesiale geval* van die algemene stelling (1)!

Verdere refleksie:

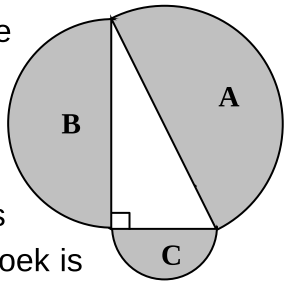
Die stelling van Pythagoras is ook ’n spesiale geval van die cosinus formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Maar kan die cosinus-formule *onafhanklik* van die Stelling van Pythagoras bewys word, m.a.w. kan on seers die cosinus-formule bewys en dan Pythagoras aflei as ’n spesiale geval wanneer $\angle A = 90°$?[4]

VRAAG 2

’n Semi-sirkel is *nie* ’n veelhoek nie, en dus geld die algemene stelling is vraag 1 nie vir die semi-sirkels nie, hoewel dit nuttig is om die semisirkels te sien as die limietgeval van veelhoeke met toenemende sye!



Bewys: As die legtes van die sye van die driehoek a, b en c is, is die areas van die drie semi-sirkels $\frac{1}{8}\pi a^2$, $\frac{1}{8}\pi b^2$ en $\frac{1}{8}\pi c^2$. Die driehoek is reghoekig dus, volgens die Stelling van Pythagoras:

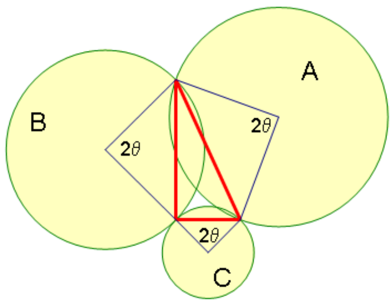
$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\times \tfrac{1}{8}\pi \Rightarrow \tfrac{1}{8}\pi a^2 = \tfrac{1}{8}\pi b^2 + \tfrac{1}{8}\pi c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$\Rightarrow$ Area A = Area B + Area C

Looking back - What if?

We have semi-circles with the centres of each circle at the midpoints of the sides of the triangle. What if the centres of the circles are not on the sides of the triangle, but as shown here?



Show that the areas of the circles are

$\pi(\frac{a}{2\sin\theta})^2$, $\pi(\frac{b}{2\sin\theta})^2$ and $\pi(\frac{c}{2\sin\theta})^2$ respectively and that the relationship area A = area B + area C still holds.

VRAAG 3

Skryf die area van die buitenste vierkant op twee maniere:

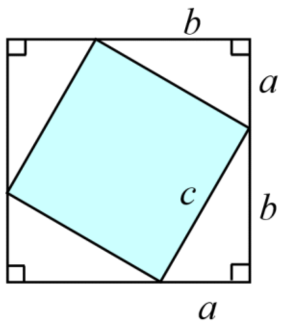
$$\text{Area} = (a+b)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{Area} = c^2 + 4\times\tfrac{1}{2}ab \quad \ldots\ \ldots. \quad (2)$$

$$\Rightarrow c^2 + 4\times\tfrac{1}{2}ab = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$



[4] Die antwoord is NEE. Dit sal ‘n *sirkelargument* wees, want die Stelling van Pythagoras word reeds voorheen in die definisies van die trigonometriese verhoudings gebruik!

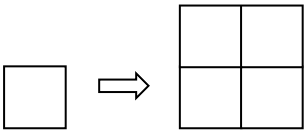
Lemma: Die oppervlakte van gelykvormige veelhoeke

As die sylengtes van twee gelykvormige veelhoeke in die verhouding *k* is, is hul oppervlaktes in die verhouding k^2.

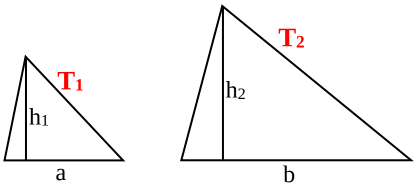
Numeries:

Sylengte van 'n vierkant	1	2	3	4	5	6
Area van vierkant	1	4	9	16	25	36

Meetkundig:
A picture is worth a 1000 words?



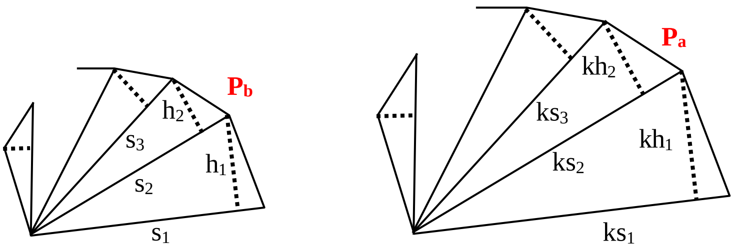
Proof:
Let T_1 and T_2 be two *similar* triangles with corresponding bases *a* and *b* and heights h_1 and h_2.



By the definition of similarity, corresponding lengths in the two triangles are proportional, so $\dfrac{a}{b} = \dfrac{h_1}{h_2}$.

So it follows that $\dfrac{\text{area T}_1}{\text{area T}_2} = \dfrac{\frac{1}{2}ah_1}{\frac{1}{2}bh_2} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} = \dfrac{a^2}{b^2}$

Now, any polygon can be dissected into triangles … If the two similar polygons P_a and P_b in the sketch have sides a of and b, then *all* corresponding lengths in the two polygons are in the ratio a:b = *k* (the corresponding sides of similar figures are proportional).



$$\frac{\text{area P}_a}{\text{area P}_b} = \frac{\frac{1}{2}ks_1.kh_1 + \frac{1}{2}ks_2.kh_2 + \ \dots\ + \frac{1}{2}ks_n.kh_n}{\frac{1}{2}s_1.h_1 + \frac{1}{2}s_2.h_2 + \ \dots\ + \frac{1}{2}s_n.h_n} = \frac{\frac{1}{2}k^2(s_1h_1 + s_2h_2 + \ \dots\ + s_nh_n)}{\frac{1}{2}(s_1h_1 + s_2h_2 + \ \dots\ + s_nh_n)} = k^2 = \frac{a^2}{b^2}$$